2016年普通高等学校招生全国统一考试（I）

数 学（文 科）A卷

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,3,5,7\},B=\{x|2\le x\le 5\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{1,3\}$　(B) $\{3,5\}$　(C) $\{5,7\}$　(D) $\{1,7\}$

2. 设 $(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 $a=$

(A) -3　(B) -2　(C) 2　(D) 3

3. 为美化环境，从红、黄、白、紫4种颜色的花中任选2种花种在一个花坛中，余下的2种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一个花坛的概率是

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{5}{6}$

4. ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a=\sqrt{5},c=2,\cos A=\dfrac{2}{3}$，则 $b=$

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 3

5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\dfrac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为

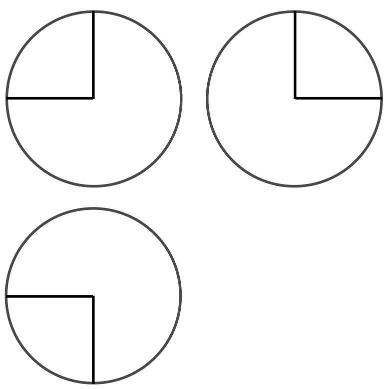
(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

6. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图像向右平移 $\dfrac{1}{4}$ 个周期后，所得图像对应的函数为

(A) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(B) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(D) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$，则它的表面积是



(A) 17π　(B) 18π

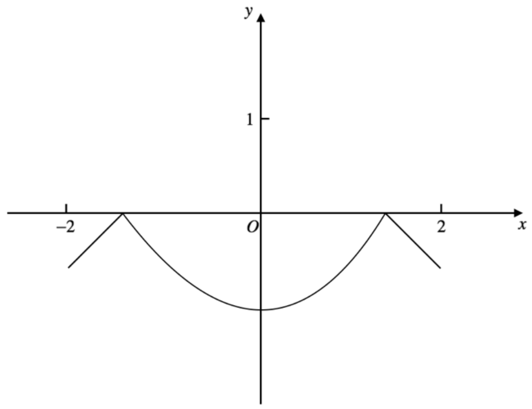
(C) 20π　(D) 28π

8. 若 $a>b>0,0<c<1$，则

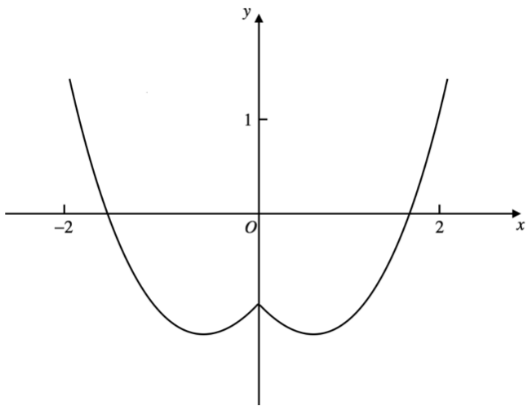
(A) $\log_a c<\log_b c$　(B) $\log_c a<\log_c b$

(C) $a^c<b^c$　(D) $c^a>c^b$

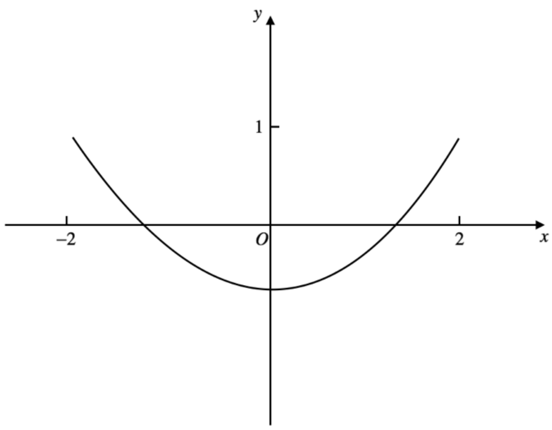
9. 函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为



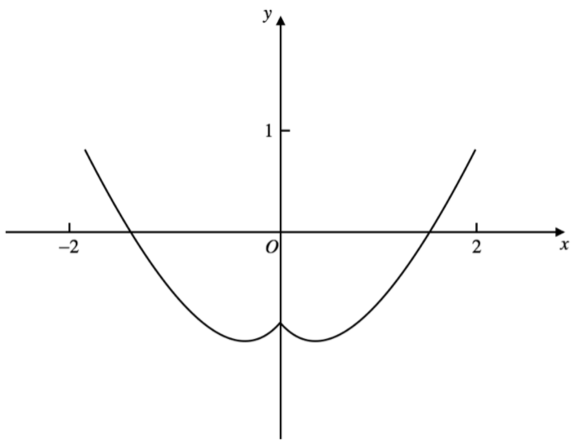
(A)



(B)



(C)



(D)

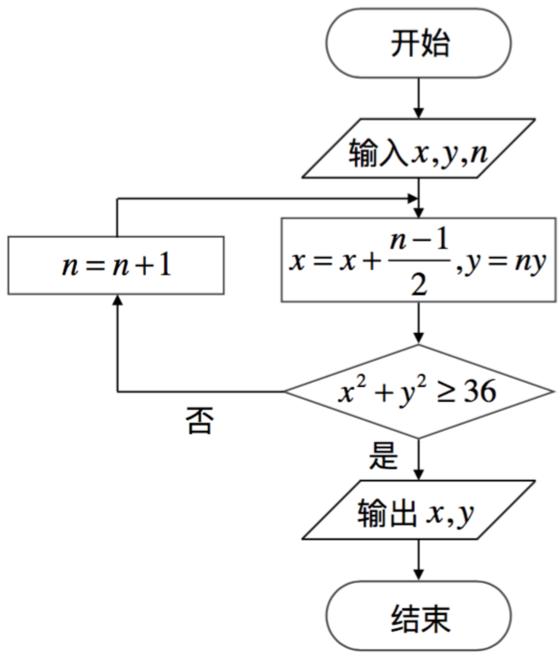
10. 执行右面的的程序框图，如果输入的 $x=0$，$y=1$，$n=1$ 则输出 x,y 的值满足

(A) $y=2x$

(B) $y=3x$

(C) $y=4x$

(D) $y=5x$



11. 平面α过正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点A，$\alpha \parallel$平面CB_1D_1，$\alpha \cap$平面$ABCD=m$，$\alpha \cap$平面$ABB_1A_1=n$，则m,n所成角的正弦值为

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

12. 若函数$f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$在$(-\infty,+\infty)$单调递增，则$a$的取值范围是

(A) $[-1,1]$　　(B) $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$　　(C) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$　　(D) $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$

二、填空题

13. 设向量$\vec{a}=(x,x+1),\vec{b}=(1,2)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x=$________.

14. 已知θ是第四象限角，且$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，则$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

15. 设直线$y=x+2a$与圆$C:x^2+y^2-2ay-2=0$相交于A,B两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则圆C的面积为________.

16. 某高科技企业生产产品A和产品B需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品A需要甲材料$1.5kg$，乙材料$1kg$，用5个工时；生产一件产品B需要甲材料$0.5kg$，乙材料$0.3kg$，用3个工时. 生产一件产品A的利润为2100元，生产一件产品B的利润为900元. 该企业现有甲材料$150kg$，乙材料$90kg$，则在不超过600个工时的条件下，生产产品A、产品B的利润之和的最大值为________.

三、解答题

17. （本小题满分12分）

已知$\{a_n\}$是公差为3的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_2=\dfrac{1}{3},a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

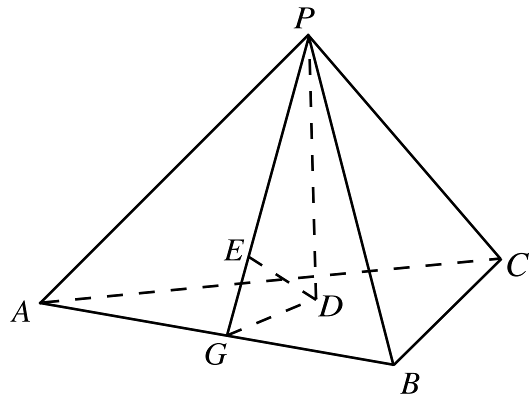
(2) 求$\{b_n\}$的前n项和.

18.（本小题满分12分）

如图，已知正三棱锥$P-ABC$的侧面是直角三角形，$PA=6$，顶点P在平面ABC内的正投影为点D，D在平面PAB内的正投影为点E，连结PE并延长交AB于点G.

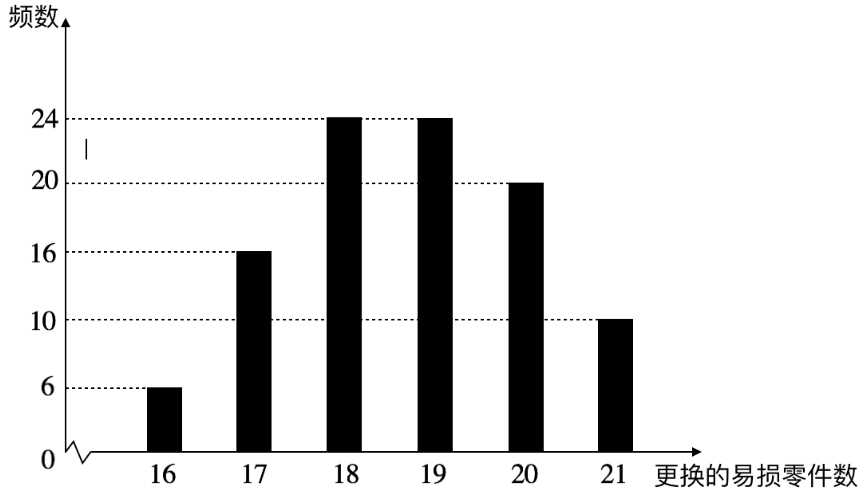
(1) 证明：G是AB的中点；

(2) 在图中作出点E在平面PAC内的正投影(说明作法及理由)，并求四面体$PDEF$的体积.



19. （本小题满分12分）

某公司计划购买1台机器，该种机器使用三年后即被淘汰. 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个200元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个500元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了100台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



记x表示1台机器在三年使用期内需更换的易损零件数，y表示1台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元），n表示购机的同时购买的易损零件数.

(1) 若$n=19$，求y与x的函数解析式；

(2) 若要求“需更换的易损零件数不大于n”的频率不小于0.5，求n的最小值；

(3) 假设这100台机器在购机的同时每台都购买19个易损零件，或每台都购买20个易损零件，分别计算这100台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买1台机器的同时应购买19个还是20个易损零件？

20. （本小题满分12分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 $y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连结 ON 并延长交 C 于点 H.

(1) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$；

(2) 除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由.

21．（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

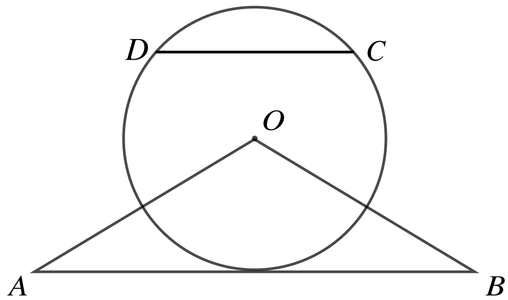
请在第(22)、(23)、(24)题中任选一题作答.

22.（本小题满分10分）

如图，ΔOAB是等腰三角形，$\angle AOB=120°$．以O为圆心，$\frac{1}{2}OA$为半径作圆.

(1) 证明：直线AB与$\odot O$相切；

(2) 点C,D在$\odot O$上，且A,B,C,D四点共圆，证明：$AB\parallel CD$.



23.（本小题满分10分）

在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\y=1+a\sin t\end{cases}$（$t$为参数，$a>0$）．在以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线$C_2:\rho=4\cos\theta$.

(1) 说明C_1是哪一种曲线，并将C_1的方程化为极坐标方程；

(2) 直线C_3的极坐标方程为$\theta=\alpha_0$，其中α_0满足$\tan\alpha_0=2$，若曲线C_1与C_2的公共点都在C_3上，求a.

24.（本小题满分10分）

已知函数$f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(1) 画出$y=f(x)$的图像；

(2) 求不等式$|f(x)|>1$的解集.

2016年普通高等学校招生全国统一考试（I）

数 学（文 科）A卷

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	D	B	D	A	B	D	C	A	C

二、填空题

13. $-\dfrac{2}{3}$　　14. $-\dfrac{4}{3}$　　15. 4π　　16. 216000

三、解答题

17. （本小题满分12分）

解：

(1) 当$n=1$时，由已知$a_1b_2+b_2=b_1$，所以$a_1=2$，

所以$a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$.

(2) 由已知：$b_{n+1}\cdot 3n=n\cdot b_n$，所以$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{3}$，且$\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{3}$也适合该式，

所以数列$\{b_n\}$是以1为首项，$\dfrac{1}{3}$为公比的等比数列，

所以$b_n=1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3^{n-1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}}$.

18. （本小题满分12分）

证明：

(1) 由已知：$PD\perp$平面ABC，因为$AB\subset$平面ABC，所以$PD\perp AB$；

$DE\perp$平面PAB，因为$AB\subset$平面ABC，所以$DE\perp AB$，

有$\begin{cases}PD\perp AB\\ DE\perp AB\\ PD\cap DE=D\end{cases}$，所以$AB\perp$平面$PDE$，

因为$PG\subset$平面PDE，所以$AB\perp PG$，

因为三棱锥$P-ABC$为正三棱锥，所以$PA=PB$，

所以G为AB的中点.

解：

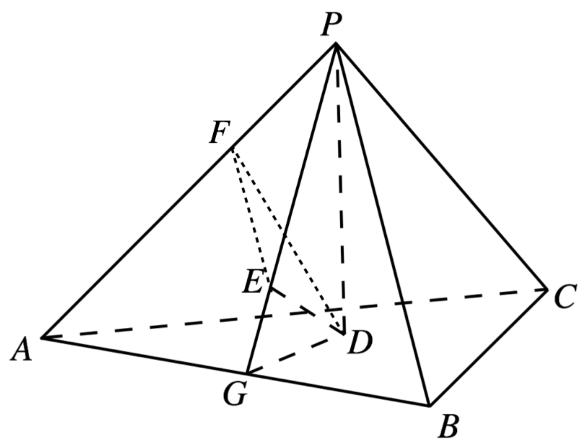
(2) 如图，因为侧面 PAB,PBC 是直角三角形，

所以 $PB\perp PA,PB\perp PC$ ，且 $PA\cap PC=P$ ，所以 $PB\perp$ 平面 PAC ，

作 $EF\parallel PB$ 交 PA 于点 F ，则 $EF\perp$ 平面 PAC ，即 F 为点 E 在平面 PAC 内的正投影.

在等腰 $Rt\Delta PAB$ 中，

$AB=6\sqrt{2},PG=\frac{1}{2}AB=3\sqrt{2}$ ，



因为 ΔABC 为等边三角形，

所以 $DG\perp AB$ ，所以 $DG=\sqrt{6}$.

在 $Rt\Delta PDG$ 中， $PD=2\sqrt{3}$ ，

因为 $DE\cdot PG=PD\cdot DG$ ，所以 $DE=2$ ，

在 $Rt\Delta PED$ 中， $PE=2\sqrt{2}$ ，

易知 ΔPEF 为等腰 $Rt\Delta$ ，所以 $PF=EF=2$.

DE 为三棱锥 $D-PEF$ 的高，

所以四面体 $PDEF$ 的体积为 $V_{D-PEF}=\frac{1}{3}\times DE\times\frac{1}{2}\times PF\times EF=\frac{4}{3}$.

19. （本小题满分12分）

解：

(1) $y=\begin{cases} 3800 & x\le 19 \\ 500x-5700 & x>19 \end{cases}$.

(2) 由题意， $P(x=16)=0.06$ ， $P(x=17)=0.16$ ， $P(x=18)=0.24$ ，

$P(x=19)=0.24$ ， $P(x=20)=0.2$ ， $P(x=21)=0.1$.

$P(x=16)+P(x=17)+P(x=18)=0.46<0.5$ ，

$P(x=16)+P(x=17)+P(x=18)+P(x=19)=0.7>0.5$ ，

所以满足题意的 n 最小值为19.

(3) 当 $n=19$ 时，购买易损零件所需用的平均数为：

$E_1=19\times 200+(0.2\times 1+0.1\times 2)\times 500=4000$ （元），

当 $n=20$ 时，购买易损零件所需用的平均数为：

$E_2=20\times 200+0.1\times 1\times 500=4050$ （元），

因为 $E_1<E_2$ ，所以购买1台机器的同时应购买19个易损零件.

20. （本小题满分12分）

解：

(1) 由已知：$M(0,t),P\left(\frac{t^2}{2p},t\right)$.

点M关于点P的对称点$N\left(\frac{t^2}{p},t\right)$，直线$ON$的斜率为$\frac{t-0}{\frac{t^2}{p}-0}=\frac{p}{t}$，

所以直线ON的方程为：$y=\frac{p}{t}x$，与抛物线$C:y^2=2px$联立，

解得点H的坐标为$\left(\frac{2t^2}{p},2t\right)$，

作$HQ\perp y$轴，交y轴于点Q，则$HQ\parallel MN$，有$Q(0,2t)$，

所以$\frac{|OH|}{|ON|}=\frac{|OQ|}{|OM|}=\frac{|2t|}{|t|}=2$.

(2) 由（1）知：直线MH的斜率为$\frac{2t-t}{\frac{2t^2}{p}-0}=\frac{p}{2t}$，所以直线$MH$的方程为：$y=\frac{p}{2t}x+t$，

整理得：$x=\frac{2t}{p}(y-t)$，与抛物线$C:y^2=2px$联立，消去x，得：$y^2-4ty+4t^2=0$，

由$\Delta=16t^2-16t^2=0$得，直线MH与抛物线C相切，所以除H以外，没有其他公共点.

21. （本小题满分12分）

解：

(1) 函数$f(x)$的定义域为R.

$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$，令$f'(x)=0$，则$x=1$或$e^x=-2a$.

①若$a=0$，$f(x)=(x-2)e^x\ (x\in R)$，

$f'(x)=(x-1)e^x$，当$x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减；

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

②若$a>0$，则$e^x+2a>0$，

当$x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减；

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

③若 $a<0$，由 $e^x=-2a$ 解得 $x=\ln(-2a)$，

i)若 $a=-\frac{e}{2}$，

则 $f'(x)=(x-1)(e^x-e)\ge 0$ 恒成立，

此时 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

ii)若 $a<-\frac{e}{2}$，

令 $f'(x)>0$，得：$x<1$ 或 $x>\ln(-2a)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增；

令 $f'(x)<0$，得：$1<x<\ln(-2a)$，即 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减.

iii)若 $-\frac{e}{2}<a<0$，

令 $f'(x)>0$，得：$x<\ln(-2a)$ 或 $x>1$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

令 $f'(x)<0$，得：$\ln(-2a)<x<1$，即 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),1)$ 上单调递减.

综上.

(2) 由（1）知：

①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处有最小值 $f(1)=-e<0$，

当 $x<1$ 时，$f(x)=(x-2)e^x<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 没有两个零点，不满足题意.

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处有最小值 $f(1)=-e<0$，

又 $f(2)=a>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有一个零点，

又由讨论①知：当 $x\leftarrow-\infty$ 时，$(x-2)e^x\to 0$，$a(x-1)^2\to+\infty$，

所以当 $x<1$ 时，$f(x)\to+\infty$，

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有一个零点，从而 $f(x)$ 在 R 上有两个零点.

③当 $a<0$ 时，

i)若 $a=-\frac{e}{2}$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，没有两个零点，不满足题意.

ii)若 $a<-\frac{e}{2}$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，

因为 $f(1)=-e<0$，所以此时 $f(x)$ 没有两个零点，不满足题意.

iii)若 $-\frac{e}{2}<a<0$，$f(x)$ 在 $x=\ln(-2a)$ 处取得极大值，

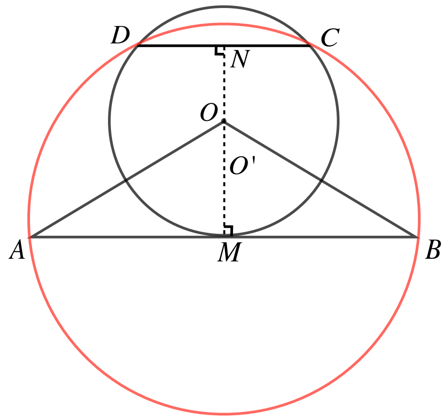
因为 $f(\ln(-2a))=[\ln(-2a)-2]\cdot(-2a)+a[\ln(-2a)-1]^2=a[\ln(-2a)-2]^2+a<0$，

所以此时 $f(x)$ 没有两个零点，不满足题意.

综上所述，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$.

22.（本小题满分10分）

解：



(1) 如图，作$OM\perp AB$交AB于点M，

因为$\angle AOB=120^\circ$，所以$\angle OAB=30^\circ$，

在$Rt\Delta OAM$中，$OM=\dfrac{1}{2}OA$，

所以OM为半径，即M点在圆上，

所以M为直线AB与$\odot O$的切点，得证.

(2) 如图，设A,B,C,D四点共圆为$\odot O'$，

根据垂径定理，圆心O'在直线OM上.

同理，作$ON\perp CD$交CD于点N，

由垂径定理可知，圆心O'也在直线ON上，即O,M,N三点共线.

因为$MN\perp AB,MN\perp CD$，所以$AB\parallel CD$.

23.（本小题满分10分）

解：

(1) 曲线C_1是圆心为$(0,1)$，半径为a的圆，C_1的直角坐标方程为：$x^2+(y-1)^2=a^2$，

化为极坐标方程为：$\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$.

(2) 曲线$C_2:(x-2)^2+y^2=4$，曲线$C_3:y=2x$，

联立$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ y=2x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\\ y=\dfrac{8}{5}\end{cases}$，即公共点为$(0,0)$及$\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$，

将公共点代入曲线C_2的直角坐标方程，解得$a=1$.

24.（本小题满分10分）

解：

(1) $f(x)=|x+1|-|2x-3|=\begin{cases}x-4,x\le -1\\ 3x-2,-1<x\le\dfrac{3}{2}\\ -x+4,x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$，图像如图（略）.

(2) 因为$|f(x)|>1$，所以$f(x)<-1$或$f(x)>1$.

对于不等式$f(x)<-1$：

i)当$x\le -1$时，解不等式$x-4<-1$，解得$x<3$，所以$x\le -1$；

ii) 当 $-1<x\le\frac{3}{2}$ 时，解不等式 $3x-2<-1$，解得 $x<\frac{1}{3}$，所以 $-1<x<\frac{1}{3}$；

iii) 当 $x>\frac{3}{2}$ 时，解不等式 $-x+4<-1$，解得 $x>5$，所以 $x>5$.

所以 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>5$.

对于不等式 $f(x)>1$：

i) 当 $x\le-1$ 时，解不等式 $x-4>1$，解得 $x>5$，所以无解；

ii) 当 $-1<x\le\frac{3}{2}$ 时，解不等式 $3x-2>1$，解得 $x>1$，所以 $1<x\le\frac{3}{2}$；

iii) 当 $x>\frac{3}{2}$ 时，解不等式 $-x+4>1$，解得 $x<3$，所以 $\frac{3}{2}<x<3$.

所以 $1<x<3$.

综上所述，不等式 $|f(x)|>1$ 的解集为 $\{x\mid x<\frac{1}{3}$ 或 $1<x<3$ 或 $x>5\}$.

（答案仅供参考，如有错误敬请联系修改）